

# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Факультета математики и информационных технологий

Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

г. Саранск, 2 апреля 2013 г.

**Задача 1.** Даны векторы  $\vec{a} = \{3, 7, 2\}$ ,  $\vec{b} = \{4, 5, 2\}$  и  $\vec{c} = \{2x - x^2, 8, 0\}$ , причем  $|\vec{c}| \leq 17$ . Найдите наибольший объем параллелепипеда, построенного на этих векторах.

**Задача 2.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \sin(\operatorname{tg} x)}$ .

**Задача 3.** Астроида вписана в окружность  $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 3 = 0$  так, что ее лучи параллельны осям координат. Найдите уравнение касательной к астроиде, проведенной в точке с координатами (2; 3).

**Задача 4.** Решите уравнение 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & x & \dots & x \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \text{ при } n \geq 2.$$

**Задача 5.** На параболу  $x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) найти такую точку, чтобы нормаль, проведенная к параболу в этой точке, отсекала внутри параболы сегмент наименьшей площади.

**Задача 6.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ .