

XI Олимпиада по математике для школьников
ФГБОУ ВО “МГУ им. Н.П. Огарёва”
(2020–2021 учебный год)

11 класс

Задача 11.1. Найти сумму значений функции $y = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$ в точках экстремума, принадлежащих отрезку $[0; 20,21\pi]$.

Задача 11.2. Вершины равностороннего треугольника попарно соединили тремя равными дугами окружностей одинакового радиуса $r > 0$ с разными центрами и имеющими градусную меру в 90° . Найти площадь области, ограниченной этими дугами.

Задача 11.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\log_2^3 x + \log_2^2 x = 4\log_2 y - 1, \\ 6\log_2^3 y + \log_2^2 y = 4\log_2 x - 1. \end{cases}$$

Задача 11.4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AA_1 , $B_1 C_1$, DD_1 и $A_1 B_1$ отмечены точки K , L , M и N соответственно так, что $AK : KA_1 = D_1 M : MD = 3 : 1$ и $B_1 L = LC_1 = A_1 N = NB_1$. Доказать, что отрезки KL и MN пересекаются в некоторой точке P и найти, в каких отношениях точка P делит эти отрезки.

Задача 11.5. Найти наименьшее значение выражения

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2020}^2$$

при условии, что справедливо равенство

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \dots + 2020x_{2020} = 1.$$

Задача 11.6. Найти все пары значений параметров (a, b) такие, что система уравнений

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2, \\ (x - b)^2 + (y + b)^2 = r^2, \end{cases}$$

где $r > 0$, имеет единственное решение (x, y) , и найти это решение в зависимости от параметров (a, b) .