Задачи для 8 класса
XII Олимпиады по математике для школьников
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»

Задача 8.1. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{8}{\sqrt{6}-2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}-4\sqrt{6}$.

Задача 8.2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=|x-5|$, $y=1+\frac{1}{2}x$ и $y=3+\frac{1}{2}x$.

Задача 8.3. Найти наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2021 становится квадратом, а на 2022 кубом натурального числа.

Задача 8.4. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбрали точки C_1 и A_1, таким образом, что $AC_1:C_1B=CA_1:A_1B$. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. В каком отношении прямая BK делит сторону AC?

Задача 8.5. Петя задумал 14 натуральных чисел и записал на доске все возможные суммы любых тринадцати чисел из этого набора. Когда Лева зашел в класс, то на доске были выписаны числа 2022, 2023, ... 2034. Повторяющиеся суммы Петя выписывал только один раз. Помогите Леве определить числа, которые задумал Петя.

Задача 8.6. Из города A в город B выехал мотоцикл, и одновременно с ним из города B в город A выехал автомобиль. Через два часа автомобиль был ровно на полпути от мотоцикла до города B. Через сколько часов со старта автомобиль окажется на полпути от мотоцикла до города A, если скорость автомобиля не больше чем в два раза больше скорости мотоцикла?

Задачи для 9 класса
XII Олимпиады по математике для школьников
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»

Задача 9.1. Постройте фигуру, координаты (x, y) каждой точки которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} y \geq 2|x+2| - 13\frac{1}{2}, \\ y \leq |x+3| - 5\frac{1}{2}, \end{cases}$$

и найдите её площадь.

Задача 9.2. Из двух сплавов меди и олова получили третий сплав. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 5% олова. Масса второго сплава меньше массы первого сплава на 90 грамм. Третий сплав содержит 45% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Задача 9.3. Найдите значение выражения

$$\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}$$

при $a = \frac{5}{12}$.

Задача 9.4. В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность радиуса r. Перпендикулярно боковой стороне AB на расстоянии d от вершины A проведена касательная к окружности, отличная от AB. Найдите площадь S треугольника ABC.

Задача 9.5. Решите уравнение в целых числах $x^2 + 3y^2 = 2021 + 4xy$.

Задача 9.6. Найдите вероятность того, что наугад выбранные три различных числа от 1 до 9 могут служить сторонами треугольника.

Задачи для 10 класса
XII Олимпиады по математике для школьников
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»

Задача 10.1. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$|1-x^2| \le a-x.$$

Задача 10.2. Решить уравнение в целых числах

$$x^2+3xy+y^2=x^2y^2.$$

Задача 10.3. Сравнить два числа

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2021^2} \text{ и } \frac{1}{2}.$$

Задача 10.4. В конус вписан шар радиуса 6. Найти объём конуса, если известно, что плоскость, ближайшая к вершине конуса, касающаяся шара и перпендикулярная одной из его образующих, отстоит от вершины конуса на расстоянии 2.

Задача 10.5. Найти $tg5^o+tg25^o+tg45^o+\cdots+tg165^o$.

Задача 10.6. Найти количество целочисленных неотрицательных решений системы

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2021, \\ x_1\cdot x_4>0. \end{cases}$$

Задачи для 11 класса
XII Олимпиады по математике для школьников
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»

Задача 11.1. Имеется 10 карточек, на каждой из которых написано по одному числу из набора 2021, 2021^2, 2021^3, …, 2021^{10} (на разных карточках написаны разные числа). Найти вероятность того, что для трёх наугад выбранных карточек произведение двух меньших чисел, написанных на карточках, делится на третье самое большое число.

Задача 11.2. Найти множество значений функции $f(x) = 7\sin x - \sin 7x$ на отрезке $[-\pi/3; \pi/3]$.

Задача 11.3. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписаны две сферы ω и Ω, каждая из которых касается плоскости BDA_1 и некоторых трёх попарно соседних граней куба, причём каждая грань куба касается только одной сферы. Найти отношение $r : R$ радиусов сфер ω и Ω.

Задача 11.4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 8\sin^3 x + 4\sin^2 x = 6\sin y + 3, \\ 8\sin^3 y + 4\sin^2 y = 6\sin x + 3. \end{cases}$$

Задача 11.5. Существуют ли различные положительные числа a, b, c, d такие, что выполняются равенства $\log_a c = b$, $\log_b d = a$, $\log_c b = d$, $\log_d a = c$? Ответ обосновать.

Задача 11.6. Пусть дан разносторонний остроугольный треугольник ΔABC и пусть точка H – точка пересечения его высот. Пусть точки A_2, B_2, C_2 симметричны точке H относительно середин A_1, B_1, C_1 сторон BC, AC, AB соответственно. Пусть отрезки A_2B_2, A_2C_2, B_2C_2 пересекают прямые CH, BH, AH в точках C_3, B_3, A_3 соответственно. Доказать, что $A_1B_3 = A_1C_3$, $B_1A_3 = B_1C_3$, $C_1A_3 = C_1B_3$.